«Фантастика и реальность». Избранные задачи внутришкольной олимпиады по физике и астрофизике

В статье представляются материалы внутришкольных олимпиад и конкурсов по физике и астрофизике, проведённых автором в 2007-2008 гг. в лицее №2 г. Тулы.

Условия

1. Космические старты

Задача 1. Первый искусственный спутник Земли (ИСЗ). Запущен в СССР 4 октября 1957 г. Максимальная высота над поверхностью Земли $h_{\max} = 947$ км. Минимальная высота над поверхностью Земли $h_{\min} = 228$ км. Определить период обращения спутника вокруг Земли.

Радиус Земли $R = 6370$ км. Большая полуось лунной орбиты $a_л = 384400$ км. Период обращения Луны вокруг Земли $T_л = 27{,}32$ сут.

Задача 2. Торможение спутника. Искусственный спутник Земли, имеющий форму шара радиуса $a = 0{,}5$ м, обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $H_0 = 200$ км, где плотность атмосферы $\rho = 10^{-13}$ г/см^3. Оценить, на сколько будет снижаться спутник за один оборот вокруг Земли. Плотность вещества спутника, усреднённая по его объёму, $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Задача 3. Посадка на Луну. Космический корабль массой $M_0 = 12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h = 100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается двигатель. Скорость вытекающих из сопла ракеты газов $u_0 = 10$ км/с относительно корабля. Радиус Луны $R = 1700$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_0 = 1{,}7$ м/с^2.

1) Какую массу топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабль опустился на Луну в точке B (см. рис. 1)?

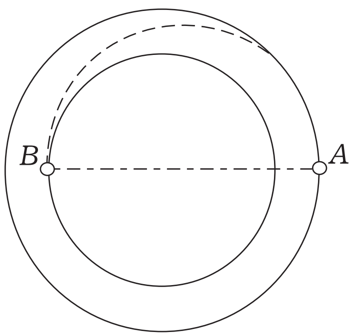


Рис. 1

2) Через какое время корабль прилунится в заданной точке?

2. Равновесные формы небесных тел

Все малые небесные тела (астероиды, малые спутники планет и т.п.) бесформенны по-своему. Фигуры больших небесных тел (звёзд, планет и их спутников) – сферы, немного сплюснутые вращением. Сферическая форма – это равновесная форма устойчивой конфигурации массивного тела. Небесные тела становятся сферическими под действием сил собственного гравитационного поля. Твёрдое вещество небольшого астероида может сохранять произвольную (несферическую форму). Но если его масса M превзойдёт некий «критический» предел $M_{кр}$, то ускорение свободного падения на его поверхности станет настолько велико, что камень не выдержит нагрузки собственного веса, – выступающие части астероида обвалятся, приближая его форму к сферической.

Давление сил гравитации (гравитационное, или гидростатическое давление) в центральной части небесного тела можно оценить как

$$P_g \approx \rho g R \approx \frac{GM^2}{R^4} \approx GM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}},$$

где R – характерный размер тела, $\rho \approx M/R^3$ – плотность вещества, $g = GM/R^2$ – ускорение свободного падения на поверхности тела, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная.

Если форма твёрдого тела несферическая, то под действием сил тяготения в нём возникают сдвиговые напряжения (деформации сдвига). Твёрдые тела упруго противодействуют напряжению сдвига, но до известного предела – предела прочности σ_m. При сдвиговых напряжениях, превосходящих этот предел, твёрдое тело необратимо меняет свою форму.

Задача 4. Сферическая форма небесных тел. Где проходит граница между малыми и большими небесными телами? Начиная с какой «критической» массы $M_{кр}$, с какого «критического» размера $R_{кр}$ небесное тело будет иметь сферическую форму?

Таблица 1

Вещество	ρ, кг/м^3	$\sigma_m \times 10^6$, Па
Лёд	920	3
Лунная порода	2500	30
Гранит	2700	100
Железо	7800	1000

Численные оценки получите для тел, состоящих: 1) из льда, 2) лунной породы, 3) гранита, 4) железа. (Необходимые данные приведены в таблице 1, где ρ – плотность вещества, σ_m – предел прочности при деформациях сдвига.)

Задача 5. Максимальная высота горы на планете. На небесных телах с размерами порядка критического высота гор может быть сравнима с их размерами. А какова высота гор на Земле?

Задача 6. Динамическое сжатие Земли: модель Ньютона. В 1687 году (320 лет назад!) И. Ньютон опубликовал свой знаменитый труд «Математические начала натуральной философии». Именно здесь он изложил основы классической механики, закон всемирного тяготения и т.д. Одной из задач была задача о форме Земли. Ньютон утверждал, что Земля у полюсов сплюснута по причине её вращения вокруг своей оси. Для доказательства этого Ньютон предложил следующую модель. Предположим, что в Земле прорыты два колодца до её центра: один вдоль оси вращения, другой – в плоскости экватора (рис. 2). Колодцы заполнены водой.

Используя модель Ньютона, оцените динамическое сжатие Земли $\varepsilon = \dfrac{\Delta R}{R_э}$, где $\Delta R = R_э - R_п$, $R_э$ – экваториальный радиус, а $R_п$ – полярный радиус Земли.

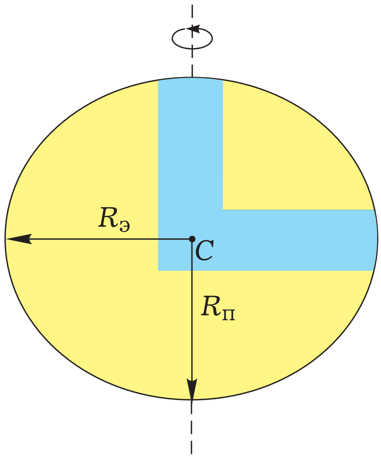


Рис. 2

Данные о Земле: масса $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, экваториальный радиус $R_э = 6378$ км, период вращения вокруг своей оси $T = 24$ ч.

Задача 7. Динамическое сжатие звезды: модель Роша. Анализ равновесной формы вращающейся газовой конфигурации (звезды) можно провести на основе модели Роша. В рамках этой модели предполагается, что распределение массы вещества звезды не изменяется при вращении (модель твердотельного вращения). Поверхность звезды представляет собой поверхность равного потенциала гравитационных и центробежных сил:

$$\varphi = \varphi_{гр} + \varphi_{цб} = \text{const}, \qquad (7.1)$$

где $\varphi_{гр} = -\dfrac{GM}{r}$ – гравитационный потенциал, а $\varphi_{цб} = -\dfrac{1}{2} \cdot \omega^2 r^2 \cos^2\alpha$ – потенциал поля центробежной силы инерции в данной точке поверхности звезды, ω – угловая скорость вращения звезды вокруг своей оси (рис. 3).

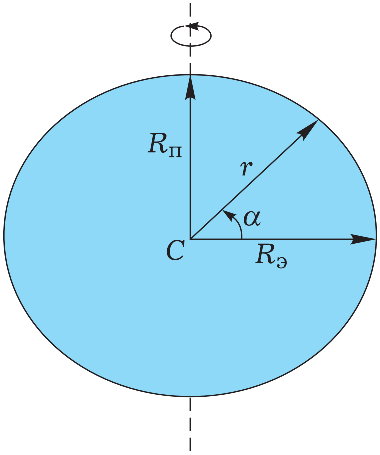


Рис. 3

1. Определите абсолютное динамическое сжатие звезды $\Delta R = R_э - R_п$, где $R_э$ – экваториальный радиус, а $R_п$ – полярный радиус звезды. Вычислите абсолютное динамическое сжатие Солнца. Данные о Солнце: масса $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг, экваториальный радиус $R_э = 7{,}0 \cdot 10^{8}$ м, период вращения вокруг своей оси $T = 25{,}38$ сут.

2. При каком значении экваториального радиуса R_m начнётся истечение вещества с экватора Солнца?

3. Найдите максимально возможное сжатие звезды $R_э / R_п$ и соответствующее ему предельное значение периода вращения звезды. Численную оценку получите для Солнца.

3. Сверхмассивные чёрные дыры

Задача 8. Сверхмассивная чёрная дыра в центре нашей Галактики. Предполагается, что в центре нашей Галактики находится «сверхмассивная чёрная дыра» (СЧД). По наблюдениям 1992-2002 гг. удалось построить орбиту движения звезды S2 вокруг СЧД в центре Галактики. Орбита этой звезды оказалась эллиптической:

1) эксцентриситет орбиты $e = 0,87$;

2) орбитальный период $T = 15,2$ года;

3) минимальное расстояние от СЧД $r_{\min} = 120$ а.е., где 1 а.е. $= 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

Оцените массу и гравитационный радиус предполагаемой СЧД по данным об орбите звезды S2.

Задача 9. СЧД в ядрах активных галактик и квазарах.

9.1. Возможным источником активности ядер галактик и квазаров является аккреция вещества на СЧД. Максимальная светимость в этом случае принимается равной эддингтоновскому («критическому») пределу светимости

$$L_{\text{кр}} = 1,3 \cdot 10^{31} \left(\frac{M_{BH}}{M_{\Theta}} \right) \text{Вт},$$

где M_{BH} – масса СЧД, M_{Θ} – масса Солнца. Используя эту модель, оцените массу СЧД, находящейся в центре квазара 3С 273. Светимость этого квазара

$$L = 10^{40}\ \text{Вт}.$$

9.2. В моделях активных ядер галактик и квазаров, предполагающих наличие СЧД в их центрах, рассматривается следующий процесс: разрыв нормальных звёзд приливными силами поля тяготения СЧД. Аккреция вещества разрушенной звезды на СЧД приводит к поддержанию активности ядер галактик и квазаров. Оцените максимальную массу СЧД, способной разрушать звёзды типа Солнца.

Задача 10. Путешествие в другие миры через чёрную дыру. Существует гипотеза о возможности путешествия из одной вселенной в другую через чёрную дыру (Н.С. Кардашев, 1975 г.). Одним из главных здесь является вопрос, не разорвут ли приливные силы астронавта в процессе его перехода через сферу Шварцшильда чёрной дыры. Оцените массу черной дыры (ЧД), «прыгать» в которую совершенно безопасно.

Решения

1. Космические старты

Задача 1. Первый искусственный спутник Земли (ИСЗ). Запишем третий закон Кеплера для спутника и Луны, обращающихся вокруг одного центрального тела – Земли:

$$\left(\frac{T_{\text{с}}}{T_{\text{л}}} \right)^2 = \left(\frac{a_{\text{с}}}{a_{\text{л}}} \right)^3. \qquad (1.1)$$

Из (1.1) находим большую полуось орбиты спутника:

$$a_с = a_л \cdot \left(\frac{T_с}{T_л}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (1.2)$$

Т.к. $2a_с = r_{max} + r_{min}$, $r_{max} = R + h_{max}$, $r_{min} = R + h_{min}$, из (1.2) получаем:

$$T_с = T_л \cdot \left(\frac{h_{min} + h_{max} + 2R}{2a_л}\right)^{\frac{3}{2}} = 96 мин.$$

Задача 2. Торможение спутника. Элементарно задача решается в рамках приближения «последовательных круговых орбит» и сводится к определению приращения радиуса орбиты спутника Δr. Действительно, т.к. радиус орбиты $r = R + H$, где H – высота орбиты, то $\Delta r = \Delta H$. В этом приближении $\frac{\Delta r}{r_0} \ll 1$ и, соответственно,

$$\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1, \qquad (2.1)$$

где T_0 – период обращения спутника на начальной круговой орбите радиуса $r_0 = R + H_0$, ΔT – приращение периода обращения спутника.

Т.к. при торможении в атмосфере скорость спутника увеличивается, то для угловой скорости спутника имеем:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t, \qquad (2.2)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость спутника на круговой орбите радиуса $r_0 = R + H_0$, ε – угловое ускорение спутника.

Радиус r новой круговой орбиты связан с начальным радиусом r_0 уравнением

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \qquad (2.3)$$

(третий закон Кеплера для круговых орбит), где T и T_0 – периоды обращения спутника на орбитах радиусов r и r_0 соответственно.

Далее учитываем, что

$$T = T_0 + \Delta T = T_0\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \text{ и}$$

$$r = r_0 + \Delta r = r_0\left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right). \qquad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и учитывая (2.1), получаем:

$$\frac{2\Delta T}{T_0} = \frac{3\Delta r}{r_0}. \qquad (2.5)$$

При этом было учтено, что

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx, \quad x \ll 1.$$

Аналогично уравнение (2.2), где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, приводим к виду

$$2\pi \cdot \frac{\Delta T}{T_0^2} = -\varepsilon \cdot t. \qquad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) получаем уравнение

$$\frac{\Delta r}{r_0} = -\frac{\varepsilon T_0 t}{3\pi}. \qquad (2.7)$$

Начальный период T_0 находим из уравнения движения для круговых орбит:

$$m\omega_0^2 r_0 = \frac{GMm}{r_0^2} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}. \qquad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получаем:

$$\Delta r = -\frac{2\varepsilon r_0^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{GM}} \cdot t. \qquad (2.9)$$

Теперь найдём угловое ускорение спутника. Полное ускорение спутника $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, где $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ – нормальное и тангенциальное ускорения спутника соответственно. Модуль вектора нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$. Модуль вектора тангенциального ускорения $a_\tau = \varepsilon r$. Это ускорение обусловлено действием силы сопротивления $F_{\text{с}}$ атмосферного газа. Таким образом, можем написать: $a_\tau = \frac{F_{\text{с}}}{m} = \varepsilon r$ и, следовательно, $\varepsilon = \frac{F_{\text{с}}}{mr}$, где m – масса спутника. Если учесть, что $F_{\text{с}} = \frac{C\rho_{\text{ср}}S}{2}\cdot v^2$, для углового ускорения получаем:

$$\varepsilon = \frac{C\rho_{\text{ср}}S}{2mr}\cdot v^2, \qquad (2.10)$$

где v – орбитальная скорость спутника (первая космическая) на орбите радиуса r, S – площадь максимального поперечного сечения спутника, $\rho_{\text{ср}}$ – плотность среды, C – безразмерный коэффициент обтекаемости спутника (для тел сферической формы C = 0,2-0,4). Если учесть, что масса спутника $m = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3$ (≈ 520 кг) и что $v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{g_0R^2}{r}$, формула (2.10) приводится к виду

$$\varepsilon = \frac{3C\rho_{\text{ср}}g_0}{8\rho_0 a}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \qquad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что

$\varepsilon = 2{,}8\cdot 10^{-13}$ рад/с^2 при $r = r_0 = R + H_0$.

При $r = r_0$ и

$$t = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{g_0R^2}}$$

(см. (2.8)) формула (2.9) с учётом (2.11) принимает вид:

$$\Delta r = -\frac{\pi C\rho_{\text{ср}}r_0^2}{2\rho_0 a} = -\frac{\pi C\rho_{\text{ср}}\left(R+H_0\right)^2}{2\rho_0 a}.$$

При $C = 0{,}4$ получаем $\Delta r \approx -5$ м.

Задача 3. Посадка на Луну.

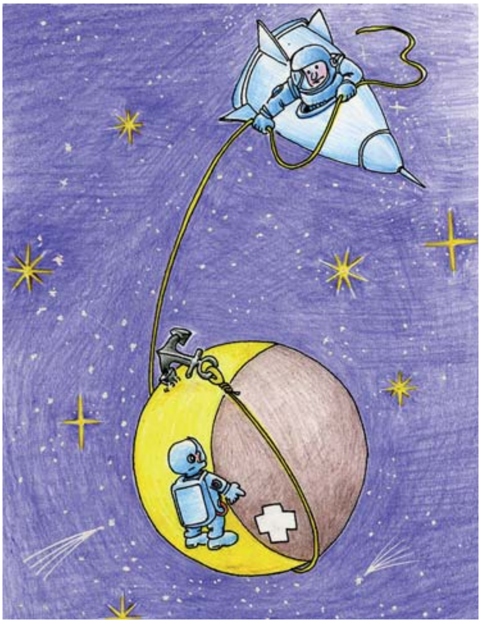
1) *Движение корабля по круговой орбите.* Из уравнения движения для круговых орбит получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_{\text{л}}}{R+h}} = \sqrt{\frac{g_0R}{1+\frac{h}{R}}} = 1652 \text{ м/с}, \quad (3.1)$$

v_0 – скорость движения корабля на круговой орбите радиуса $r_A = R + h$,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r_A^3}{GM_Л}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3}, \qquad (3.2)$$

$T_0 = 6842$ с $= 1{,}9$ ч – период обращения корабля на данной орбите.



2) *Переход на эллиптическую орбиту.* В результате запуска тормозного двигателя в точке A траектории скорость корабля изменяется от v_0 до некоторого значения v_A таким образом, что корабль переходит на эллиптическую траекторию. Далее, в процессе движения скорость корабля изменяется и в точке B траектории принимает некоторое значение v_B. На основании закона сохранения энергии $E_A = E_B$ и на основании закона сохранения момента импульса $L_A = L_B$ получаем уравнения

$$v_A^2 - \frac{2GM_л}{r_A} = v_B^2 - \frac{2GM_л}{r_B}, \quad (3.3)$$

$$r_A v_A = r_B v_B, \quad (3.4)$$

где $r_A = R + h$ и $r_B = R$. Из (3.3)-(3.4) получаем:

$$v_A = \sqrt{\frac{g_0 R}{\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1+\frac{h}{2R}\right)}} = 1628 \text{ м/с};$$

$$v_B = \left(1+\frac{h}{R}\right) v_A = 1{,}1 v_A = 1724 \text{м/с}. \quad (3.5)$$

Как видим, при запуске тормозного двигателя в точке A траектории изменение скорости аппарата составляет $\Delta v_A = v_A - v_0 = -24$ м/с.

3) *Расход топлива*. Теперь можем вычислить расход топлива Δm. На основании закона сохранения импульса получаем уравнение

$$\frac{|\Delta M|}{M_0} = \frac{|\Delta v|}{u_0},$$

$$\Delta m = |\Delta M| = \frac{M_0 |\Delta v|}{u_0}, \quad (3.6)$$

где M_0 – начальная масса корабля, $|\Delta M| = M_0 - M$, M – конечная масса корабля.

Уравнение (3.6) справедливо именно в приближении мгновенного сгорания топлива.

При запуске двигателя в точке A траектории расход массы, согласно (3.6), составляет

$$\Delta m_A = \frac{M_0 |\Delta v_A|}{u_0} = 29 \text{ кг}. \quad (3.7)$$

Теперь масса корабля равна

$$M_A = M_0 - \Delta m_A = 11971 \text{ кг}.$$

Далее необходимо «погасить» скорость v_B в точке B траектории (см.(3.5)). При изменении скорости до нуля, т.е. при $\Delta v_B = 0 - v_B = -v_B$, из (3.6) находим соответствующий расход топлива:

$$\Delta m_B = \frac{M_A |\Delta v_B|}{u_0} = 2064 \text{ кг}. \quad (3.8)$$

Таким образом, в результате запуска тормозного двигателя в точках A и B траектории расход топлива составляет

$$\Delta m_{AB} = \Delta m_A + \Delta m_B = 2093 \text{ кг}.$$

Конечная масса корабля равна $M_B = M_0 - \Delta m_{AB} = 9907$ кг.

4) *Время спуска корабля*. Третий закона Кеплера:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{r_A}\right)^3, \quad (3.9)$$

где T – период обращения корабля по эллиптической орбите. Учитывая (3.2) и что $2a = r_{\max} + r_{\min} = r_A + r_B = 2R + h$, из (3.9) находим время спуска корабля:

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \cdot \left(1+\frac{h}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) $\tau = 3{,}3 \cdot 10^3 \text{ с} = 55{,}0$ мин.

2. Равновесные формы небесных тел

Задача 4. Сферическая форма небесных тел. Тело принимает сферическую форму при условии $P_g \geq \sigma_m$:

$$\frac{GM^2}{R^4} \geq \sigma_m. \quad (4.1)$$

Учитывая, что $M \approx \rho R^3$, из (4.1) получаем:

$$M \geq M_{кр} \approx \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\sigma_m}{G}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$R \geq R_{кр} \approx \frac{1}{\rho}\left(\frac{\sigma_m}{G}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Для различных веществ из (4.2) получаем:

1) для льда $M_{кр} \approx 10^{19}$ кг и

$$R_{кр} \approx 200 \text{ км};$$

2) для лунной породы $M_{кр} \approx$

$$\approx 5 \cdot 10^{19} \text{ кг и } R_{кр} \approx 300 \text{ км};$$

3) для гранита $M_{кр} \approx 3 \cdot 10^{20}$ кг и

$$R_{кр} \approx 500 \text{ км};$$

4) для железа $M_{кр} \approx 10^{21}$ кг и

$$R_{кр} \approx 500 \text{ км}.$$

На основе этих данных легко убедиться в том, что критерий сферичности (4.2) выполняется для твёрдых тел в Солнечной системе.

Размеры всех планет Солнечной системы и их больших спутников намного больше критических, и все они имеют сферическую форму. Однако спутник Марса Фобос похож на картофелину с размерами $14 \times 11{,}5 \times 10$ км – его размеры меньше критических. Амальтея, спутник Юпитера, в длину имеет 265 км, а в поперечнике 150 км.

Задача 5. Максимальная высота горы на планете. Представим, что гора имеет форму конуса высоты h.

Объём конуса $V = \frac{1}{3}Sh$, где S – площадь основания конуса. Гидростатическое давление горы на основание $P_g = \frac{Mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \frac{1}{3}\rho g h$. Из условия «неразрушения» горы $P_g \le \sigma_m$ следует, что высота горы $h \le \frac{3\sigma_m}{\rho g}$.

Для гранитных гор на Земле получаем: $h \le 11$ км. Максимальная высота горы на Земле h = 9 км (Эверест).

Задача 6. Динамическое сжатие Земли: модель Ньютона. Как известно, гидростатическое (гравитационное) давление равноплотной жидкости на глубине h определяется формулой $P = \rho g h$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Определим гидростатическое давление P_C столба воды на дно колодца, т.е. в центре планеты. Для воды в колодце, прорытом вдоль оси вращения, запишем:

$$P_C^{пол} = \rho g_п R_п, \tag{6.1}$$

где $g_п = \frac{GM}{R_п^2}$. Аналогично для воды в колодце, прорытом вдоль экватора:

$$P_C^{экв} = \rho g_э R_э, \tag{6.2}$$

где $g_э = g_п - \omega^2 R_э$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Вода в колодцах будет находиться в гидростатическом равновесии при условии, что давления (6.1) и (6.2) равны. Таким образом, приравнивая правые части (6.1) и (6.2), получаем условие гидростатического равновесия в виде

$$g_п R_п = \left(g_п - \omega^2 R_э\right) R_э. \tag{6.3}$$

Учитывая, что

$R_п = R_э - \Delta R = R_э\left(1 - \frac{\Delta R}{R_э}\right)$, из (6.3)

получаем:

$$\frac{\Delta R}{R_э} = \frac{\omega^2 R_э^3}{GM}\left(1 - \frac{\Delta R}{R_э}\right)^2. \qquad (6.4)$$

Для подавляющего большинства небесных тел выполняется условие

$$\frac{\omega^2 R_э^3}{GM} \ll 1 \qquad (6.5\ а)$$

(«медленное» вращение). Согласно (6.4), условие (6.5 *а*) равносильно условию «малого сжатия»

$$\frac{\Delta R}{R_э} \ll 1. \qquad (6.5\ б)$$

На основании условия (6.5) формула (6.4) приводится к виду

$$\frac{\Delta R}{R_э} = \frac{\omega^2 R_э^3}{GM} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R_э^3}{GM}. \qquad (6.6)$$

Учли, что

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx,\ x \ll 1. \qquad (6.7)$$

Для Земли $\frac{\Delta R}{R_э} = 0{,}0034$.

Задача 7. Динамическое сжатие звезды: модель Роша.

1) Согласно (7.1), запишем:

$$\varphi_{гр}^{экв} + \varphi_{цб}^{экв} = \varphi_{гр}^{пол}.$$

В развёрнутом виде:

$$\frac{GM}{R_э} + \frac{1}{2}\cdot\omega^2 R_э^2 = \frac{GM}{R_п} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{GM}{R_э}\left(1 + \frac{\omega^2 R_э^3}{2GM}\right) = \frac{GM}{R_п}. \qquad (7.2)$$

Далее учитываем, что

$$R_п = R_э - \Delta R = R_э\left(1 - \frac{\Delta R}{R_э}\right).$$

Для подавляющего большинства небесных тел $\frac{\Delta R}{R_э} \ll 1$. Из (7.2) с учётом (6.7) получаем:

$$\Delta R = \frac{\left(\omega R_э^2\right)^2}{2GM} = \frac{1}{2GM}\cdot\left(\frac{2\pi R_э^2}{T}\right)^2 \qquad (7.3)$$

(см. также (6.6)). Для Солнца: $\Delta R = 7{,}4\,км$.

2) Ускорение свободного падения на экваторе

$$g_э = \frac{GM}{R_э^2} - \omega^2 R_э. \qquad (7.4)$$

Условие истечения вещества с экватора: $g_э \le 0$. Из (7.4) получаем:

$$R_э \ge R_m = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 GM\right]^{\frac{1}{3}}. \quad (7.5)$$

Для Солнца $R_m = 2{,}5\cdot 10^{10}\,м \approx 36 R_\Theta$.

3). При $R_э = R_m$ гравитационный потенциал на экваторе (формула 7.6)

$$\varphi_{экв} = \varphi_{гр}^{экв} + \varphi_{цб}^{экв} =$$

$$= -\frac{3}{2}(GM\omega)^{2/3} = -\frac{3}{2}\left(\frac{GM}{R_m}\right).$$

Т.к. $\varphi = \mathrm{const}$ (см. (7.1)), то $\varphi_{экв} = \varphi_{пол}$:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{GM}{R_m}\right) = \frac{GM}{R_п}. \qquad (7.7)$$

Следовательно, $\frac{R_m}{R_п} = \left(\frac{R_э}{R_п}\right)_{max} = 1{,}5.$

3. Сверхмассивные чёрные дыры

Задача 8. Сверхмассивная чёрная дыра в центре нашей Галактики. Массу *M* центрального тела находим из третьего закона Кеплера:

$$\frac{MT^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow M = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{a}{G}. \quad (8.1)$$

Учитывая, что $r_{min} = a(1-e)$, из (8.1) получаем:

$$M = 6{,}6\cdot 10^{36}\,кг = 3{,}3\cdot 10^6 M_\Theta,$$

$$R_g = 2GM/c^2 = 0{,}065\ а.е. \quad (8.2)$$

Задача 9. СЧД в ядрах активных галактик и квазарах.

9.1. Из равенства $L \approx L_{кр}$ получаем: $M_{BH} \approx 7{,}7 \cdot 10^8 M_{\Theta}$.

9.2. Собственное гравитационное ускорение звезды на её поверхности (напряжённость собственного поля тяготения)

$$g_{гр} = \frac{GM}{R^2}, \qquad (9.1)$$

где M и R – масса и радиус звезды соответственно. Приливное ускорение поля тяготения центрального тела (в данном случае СЧД Шварцшильда) равно

$$a_{пр} = \frac{2GM_{BH}R}{r^3}, \quad r \geq R_g, \qquad (9.2)$$

где r – расстояние между центрами СЧД и звезды.

Запишем условие разрушения звезды приливными силами поля тяготения СЧД:

$$a_{пр} \geq g_{гр}. \qquad (9.3)$$

При $r \approx R_g = \frac{2GM}{c^2}$ (в этом случае приливное ускорение (9.2) достигает максимума) из (9.3) с учётом (9.1)-(9.2) получаем:

$$M_{BH} \leq \frac{c^3}{2\sqrt{M}} \left(\frac{R}{G}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (9.4)$$

При $M \approx M_{\Theta} \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг и $R \approx R_{\Theta} \approx$ $\approx 7 \cdot 10^8$ м из (9.4) получаем:

$$M_{BH} \leq 2 \cdot 10^8 M_{\Theta}.$$

Задача 10. Путешествие в другие миры через чёрную дыру. Приливное ускорение, испытываемое человеком, падающим на ЧД,

$$a_{пр} = \frac{GM_{BH}l}{r^3}, \qquad (10.1)$$

где l – рост астронавта. Условие допустимых перегрузок:

$$a_{пр} \leq 2g_0, \qquad (10.2)$$

где $g_0 \approx 10$м/с^2. Из (10.2) с учётом (10.1) получаем:

$$M_{BH} \geq \frac{c^3}{G}\sqrt{\frac{l}{g_0}} \approx 10^5 M_{\Theta}. \qquad (10.3)$$

Литература

1. *Заикин Д.А., Овчинкин В.А., Прут Э.В.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч.1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Изд-во МФТИ, 1998.

2. *Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М.* Сборник задач по физике. – М.: Вербум-М, 2003.

3. *Бялко А.В.* Наша планета – Земля. – М.: Наука, 1989.

4. *Климишин И.А.* Релятивистская астрофизика. – М.: Наука, 1983.

5. *Черепащук А.М., Чернин А.Д.* Вселенная, жизнь, чёрные дыры. – Фрязино: «Век 2», 2003.

Материал к публикации подготовил С.П. Кожинин.